Universidade Federal Fluminense
Curso: Sistemas de Informação
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professora: Raquel Bravo

Gabarito da lista de Exercícios sobre Técnicas de Demonstração

1. Prove que o conjunto dos números primos é infinito.

   Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que existe uma quantidade finita de números primos. Vejamos até onde ela nos leva. Por esta hipótese, há apenas n números primos, onde n é inteiro. Podemos colocar os primos $p_1, p_2, ..., p_n$ em ordem, de tal forma que:

   $$p_1 < p_2 < \ldots < p_n$$

   Com isto, teríamos que p_n é o maior primo de todos.

   Considere o número $p_1.p_2.\ldots.p_n + 1$. Ele não é divisível por nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, portanto ele também é primo e, além disso, é maior do que todos os demais números primos, incluindo p_n. Mas isto contradiz a afirmação de que p_n é o maior primo de todos, o que é um absurdo! Portanto, podemos garantir que existem infinitos números primos. □

2. Prove que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

   Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ racional. Desta forma, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

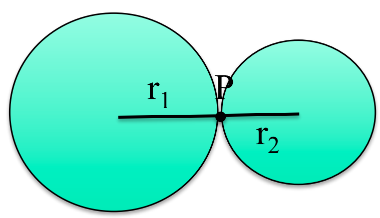
$$2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$2b^2 = a^2$$

Assim, temos que a^2 é par e, desta forma, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k. Logo:

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2(\div 2)$$
$$b^2 = 2k^2$$

O que nos diz que b também é par. Mas isto é uma contradição, pois se a e b são pares, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ poderia ser reduzida, um absurdo! Logo, podemos concluir que o número real pode ser racional, portanto é irracional. □

3. Sejam dois círculos tangentes C_1 e C_2 com respectivos raios r_1 e r_2, tais que r_1 é um número racional e r_2 irracional. Inicialmente os círculos estão parados com os pontos p_1 do círculo C_1 e p_2 do círculo C_2 coincidentes. Logo após o instante inicia, os círculos C_1 e C_2 começam um movimento uniforme de rotação sem deslizamento. Prove que uma vez o movimento iniciado, os pontos p_1 e p_2 nunca mais serão coincidentes novamente.



Demonstração. Supomos, por absurdo, que p_1 e p_2 se encontram em algum momento após os círculos terem iniciados seus movimentos. Como o movimento é uniforme e sem deslizamento, podemos afirmar que as velocidades lineares de C_1 e C_2 são iguais. Então seja esse encontro dado, após C_1 ter dado m voltas e C_2, n voltas. Dessa forma temos:

$$2\pi r_1 m = 2\pi r_2 n$$
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{n}{m}$$

Nesse ponto obtemos um absurdo, pois sendo r_1 um número racional e r_2 irracional, temos que a razão $\frac{r_1}{r_2}$ é um número irracional, enquanto $\frac{n}{m}$ é um número racional, já que $\forall n, m \in \mathbb{Z}$. Logo, essas frações não podem ser iguais. Como nossa hipótese de que os dois pontos se encontrariam em algum momento nos levou a um absurdo, concluímos que eles nunca se encontrarão, o que prova o teorema original. □

4. Prove que se n é um número inteiro, então $n^2 \geq n$.

   Demonstração. A prova será dada por casos:

   (i) Quando $n = 0$. Como $0^2 = 0$, então $n^2 \geq 0$ é verdadeiro nesse caso.

   (ii) Quando $n \geq 1$. Multiplicando os dois lados da inequação pelo inteiro positivo n, obtemos $n.n \geq n.1$. Isso implica que $n^2 \geq n$, para $n \geq 1$.

   (iii) Quando $n \leq -1$. Como $n^2 \geq 0$ então temos que $n^2 \geq 0 > -1 \geq n$, e portanto, $n^2 \geq n$.

   Podemos concluir, pela análise dos três casos, que se n é um número inteiro, então $n^2 \geq n$. □

5. Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.

   Demonstração. Suponhamos que n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo:

   $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$, onde $q = 2k^2 + 2k$ é um inteiro. Portanto, n^2 é ímpar. □

6. Prove que o produto de dois números inteiros pares é par.

   Demonstração. Suponhamos dois números inteiros n, m pares, isto é, $n = 2k$ e $m = 2q'$, com $q, q' \in \mathbb{Z}$. Logo:

   $n.m = (2k).(2q) = 4k.q = 2(2k.q) = 2r$, onde $r = 2k.q$ é um inteiro. Portanto, $n.m$ é par. □

7. Dê uma demonstração direta ao teorema "Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes esse inteiro é divisível por 4".

   Demonstração. Suponhamos que n é um inteiro divisível por 6, isto é, $n = 6q$, para algum inteiro q.

   Vamos analisar o dobro do número n, logo:

   $2n = 2(6q) = 12q = 4(3q) = 4k$, onde $k = 3q$ é um inteiro q. $\square$

8. Prove pela contrapositiva que " Se $3n + 2$ é ímpar, no qual n é um número inteiro, então n é ímpar".

   Demonstração. A prova desta afirmação será feita pela contrapositva: "Se n é par então $3n + 2$ é par, com n um número inteiro.

   Suponhamos que n é par, isto é, $n = 2k$ para algum inteiro k. Vamos analisar $3n + 2$:

   $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1) = 2q$, onde $q = 3k + 1$ é um inteiro. Portanto, $3n + 1$ é par. $\square$

9. Mostre que se $n = ab$, com a e b inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

   Demonstração. A prova desta afirmação será feita por absurdo.

   Suponhamos que $n = ab$ e $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$. Vamos analisar ab:

   $ab > \sqrt{n}.\sqrt{n} = \sqrt{n^2} = n$, ou seja, $ab > n$, o que contradiz a hipótese.

   Portanto, se $n = ab$, com a e b inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$. $\square$

10. Se um número somado a ele mesmo é ele mesmo, então esse número é 0.

    Demonstração. Suponhamos que um número x é tal que $x + x = 2x = x$. Agora, vamos supor, por absurdo, que $x \neq 0$.

    Se $x \neq 0$ então, podemos dividir a equação $2x = x$ por x, e desta forma, temos que $2 = 1$. Absurdo!

    Portanto, se um número somado a ele mesmo é ele mesmo, então esse número é 0 $\square$

11. $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n \leq 5$ então $n^2 \leq 5n + 10$.

Demonstração. A prova será feita pela demonstração direta.

$$n \leq 5$$
$$n.n \leq 5.n$$
$$n^2 \leq 5n + 0$$

Como $0 \leq 10$, podemos concluir que $n^2 \leq 5n + 0 \leq 5n + 10$.

Portanto, se $n \leq 5$ então $n^2 \leq 5n + 10$ □

12. Se n é um número inteiro par, então n^2 é par.

Demonstração. Suponhamos que n é par, isto é, $n = 2k$ para algum inteiro k. Logo:

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2q$, onde $q = 2k^2$ é um inteiro. Portanto, n^2 é par. □

13. Algum dia será possível criar um programa de computador que sempre ganhe no xadrez?

Demonstração. Suponha, por um momento, que a seguinte proposição é válida: $p =$ "existe um programa de computador que sempre ganha no xadrez". Supondo que tal programa existe, instale a mesma cópia em dois computadores e coloque um para jogar contra o outro. Ou o jogo terminará empatado (sem nenhum ganhador), ou um dos computadores perderá. Em qualquer destes casos, pelo menos uma das duas cópias do programa não vai ganhar o jogo, uma contradição, já que assumimos que o programa sempre ganha. Portanto, não existe (nem nunca existirá) um programa que sempre ganhe no xadrez. □